



TITLE:

# Ankeny-Artin-Chowla型の合同式について : 純4次及び純6次体の場合 (保型形式シンポジウム)

AUTHOR(S):

亀井, 真人

---

CITATION:

亀井, 真人. Ankeny-Artin-Chowla型の合同式について : 純4次及び純6次体の場合(保型形式シンポジウム). 数理解析研究所講究録 1985, 546: 79-92

ISSUE DATE:

1985-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98829>

RIGHT:

# Ankeny-Artin-Chowla 型の合同式について

(純 4 次及び純 6 次体の場合)

京大理 亀井真人 (Masato Kamei)

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  を、 $d$  を判別式とする実二次体とし、 $K$  の類数、基本単数をそれぞれ  $h$ ,  $\varepsilon = \frac{s+t\sqrt{d}}{2}$  と表わす。 $d$  を割る奇素数  $p$  をとり、 $m = \frac{d}{p}$  とおく。 $\text{mod } d$  の Dirichlet 指標  $(\frac{\cdot}{d})$  を  $p$ -part  $(\frac{\cdot}{p})$  と  $m$ -part  $\chi(\cdot)$  の積に分解する。 $\equiv a$  時、Ankeny, Artin, Chowla [1] により、 $h^{\frac{1}{2}} \equiv B_{\frac{1}{2}, \chi} \pmod{p}$  となる事が知られている。 $\equiv \equiv$   $B_{\frac{1}{2}, \chi}$  は一般 Bernoulli 数である。

本稿の目的は次の ①②である。

① A-A-c の結果を純 4 次体、純 6 次体の場合に拡張する事。

純 3 次体の場合の結果は伊藤博氏の論文 [3] で得られている。本稿も伊藤氏の方法によるものである。その際得られる結果 (定理 6) は、複素数の巾根の選び方から生じる不定性を持っている。そこで、

② 特殊な場合についてその巾根を決定し、それにより①の結果を精密化する事。

純3次体の場合には、③の議論は自明となる。以下では純4次体の場合を主に解説し、純6次体の場合は結果のみを記す。まず、①の結果を導ぐ過程の概略を述べよう。

$L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ,  $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ,  $M = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, i)$ ,  $K = \mathbb{Q}(i)$  とおく。誘導指標に対する Artin  $L$ -関数の関係より、

$$L(s, \chi, L_1/k_1) = L(s, \rho, M/K) = L(s, \bar{\rho}, M/K)$$

を得る。ここで、 $\chi$  は  $\text{Gal}(L_1/k_1)$  の位数2の指標、 $\rho$  は  $\text{Gal}(M/K)$  の位数4の指標である。適当な  $L_1$  の単数  $\eta_3$  と  $M$  の積田単数  $\eta_e$  を選べば、 $L'(0, \chi, L_1/k_1) = h \log \eta_3$ ,  $L'(0, \rho, M/K) = \log \eta_e$  ( $h$  は  $L_1/k_1$  の相対類数) と表わされ、 $\eta_3^h = \eta_e$  となる。 $K$  における  $m$  の素因数  $\pi$  をとり、 $\eta_3, \eta_e$  を局所体  $\bar{K}_\pi$  の元と見なして Kummer 対数微分をとれば、

$h \times (\eta_3 \text{ の係数の分数式}) \equiv (\text{一般 Hurwitz 数}) \pmod{(\text{付値 ideal})}$  なる式を得る。これが①に対する我々の結果である。§2までで正確に記述する。

## §1 $L'(0, \chi, L_1/k_1)$ 及び $L'(0, \rho, M/K)$

$m = ab^2c^3$ ,  $a \neq 1$ ,  $b, c$  は平方因子を持たない正整数で、

$a, b, c, 6$  はどの2つも互いに素であるとする。拡大  $L_1/k_1$  の相対単数を  $\eta_0$ ,  $k_1$  の基本単数を  $\varepsilon$  とおき、 $L_1$  の単数  $\eta_3$  を

$$\eta_3 = \begin{cases} \eta_0 & \dots \sqrt{\varepsilon}\eta_0 \text{ が } L_1 \text{ の単数の時} \\ \eta_0^2 & \dots \text{その他} \end{cases}$$

と定まると、相対単数基準  $R_{L/K}$  は  $R_{L/K} = \log \eta_3$  で表わされる。これより  $L'(0, \chi, L/K) = h \log \eta_3$  が従う。

$f$  を  $P$  の導関数とする。(  $f \in \mathbb{N}$  とする。 )  $\mathbb{Q}_K = \mathbb{Z}[i]$  の  $f$  を法とする ray class group を  $\mathcal{C}(f)$  と書けば、partial  $\zeta$ -関数を用いて

$$L'(0, P, M/K) = \sum_{c \in \mathcal{C}(f)} P(c) \zeta'(0, c) \quad \dots (1)$$

となる。  $\zeta = \zeta'$ 、  $\varphi_f(c) \in$  Siegel-Ramachandra-Robert の類不変量とすると  $\zeta'(0, c) = -\frac{1}{2f} \log |\varphi_f(c)|$  である。  $L(0, P, M/K) = L(0, \overline{P}, M/K)$  を思い出せば、(1) の右辺の和は  $P(c) = \pm 1$  なる  $c$  についてのみに考えればよい事がわかり、

$$L'(0, P, M/K) = \frac{1}{12f} \log \frac{\prod_{P(c)=-1} \varphi_f(c) \overline{\varphi_f(c)}}{\prod_{P(c)=1} \varphi_f(c) \overline{\varphi_f(c)}} \quad \dots (2)$$

を得る。さて、  $c, c' \in \mathcal{C}(f)$  に対して、  $\varphi_f(c)^{\sigma_{c'}} = \varphi_f(cc')$

(  $\sigma_{c'}$  は  $c'$  に対応する  $\text{Gal}(K_f/K)$  の元 )、及び  $\varphi_f(cc)/\varphi_f(c')$  が  $K_f$  (  $K \bmod f$  の maximal ray class field ) の単数の  $12f$  乗となつて

いる事が知られてゐる。従つて、  $P(c_f) = -1$  となる  $\gamma \in \mathbb{Q}_K$  を

とり  $\eta_f = \frac{\varphi(cc_f)}{\varphi(c_f)}$  とする  $K_f$  の単数  $\eta$  をとると、

$$L'(0, P, M/K) = \frac{1}{12} \log (N_{K_f/K} \eta \overline{\eta}) \quad \dots (3)$$

となる。この  $\eta$  は具体的に以下のように書かれる。(Robert [7] 参照)

$E: y^2 = 4x^3 - 4x$  を  $\mathcal{O}_K$  を準同型環として持つ楕円曲線とし、  
 $\Omega \mathcal{O}_K = \mathcal{L}$  を  $E$  に対応する周期格子とする。(すなわち、 $\gamma: \mathbb{C}/\mathcal{L} \rightarrow E$   
 $\gamma(z) = (p(z), p'(z))$  が同型となる格子である。)  $\Omega \in \mathbb{R}_+$  として  
よし。  $\sigma(z)$  を Weierstrass  $\sigma$ -関数とし、  $\theta(z)$  及び  $\phi(z, \alpha)$   
 $(\alpha \in \mathcal{O}_K)$  を  $\theta(z) = \Delta(\mathcal{L}) \sigma^3(z)$ ,  $\phi(z, \alpha) = \theta(\alpha z) / \theta(z)^{N\alpha}$  と定  
める。この時  $\phi(z, \alpha)$  は楕円函数であり、

$$\phi(z, \alpha) = \alpha^{12} \Delta(\mathcal{L})^{1-N\alpha} \prod_{\beta \in \alpha^{-1}\mathcal{L}/\mathcal{L}} (p(z) - p(\beta))^6$$

となる。有限添字集合  $J$  及び  $\beta_j \in \mathcal{O}_K$ ,  $m_j \in \mathbb{Z}$  ( $j \in J$ ) を

$$N\delta - 1 + \sum_{j \in J} m_j (N\beta_j - 1) = 0$$

$$p(C_{\beta_j}) = 1, \quad (\beta_j, \delta) = 1$$

となるように選ぶ。ここで  $\tau = \frac{\Omega}{f}$  とすると

$$\eta = \phi(\tau, \delta) \prod_{j \in J} \phi(\tau, \beta_j)^{m_j}$$

となる。対数微分を取り際、 $\eta$  が  $p$ -関数の特殊値で表わされ  
ていふ事が重要となる。

## §2 一般 Hurwitz 数、Kummer 対数微分、及び主定理

$\chi$  を  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$  の mod  $f$  の原始指標、 $\tau$  を  $\mathbb{C}/\mathcal{L}$  の原始  $f$ -分点  
としよう。(  $K, \mathcal{L}$  以外は先の記号と無関係とする。 ) 非負整数

$k$  に対し  $G_{R, \chi, \tau}$  を Lichtenbaum [4] にある一般 Hurwitz 数とする。 $G_{R, \chi, \tau}$  は Weierstrass  $S$ -関数を用いて定義される数であるが、我々は次の等式を利用する。

命題 1  $\chi(-1) = 1$  の時、 $\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha \bmod f \\ (\alpha, f)=1}} \chi(\alpha)^{-1} \frac{P'(\alpha)}{P(\alpha) - P(\alpha\tau)} = - \sum_{R=0}^{\infty} G_{R, \chi, \tau} \tau^{R-1}$

以後、前節までの記号を用いる。 $\psi$  を  $E$  の虚数乗法に対応する量指標とする。この時、 $f$  と素な  $k$  の ideal  $\mathfrak{o}$  に対し、 $\psi(\mathfrak{o})$  は  $\mathfrak{o}$  の一つの生成元となす。  $\mathfrak{o} = (\alpha)$  の時  $\alpha^* = \psi(\mathfrak{o})$  と定めると  $\alpha^*$  は  $\alpha^* \equiv 1 \pmod{(H)^3}$  となる  $\mathfrak{o}$  の生成元である。

$\alpha$  を割る  $\mathfrak{o}_k$  の素数  $\pi$  をとる。(つまり、 $\pi$  は  $m$  を丁度 1 回だけ割り切る。)  $\pi = \pi^*$  としよ。  $m, f = \text{cond } p, p = (\frac{m}{f})_4, \tau = \frac{\alpha}{f}$  を  $\pi$ -part と  $\pi$  と素な part に分解する。

- $m = \pi m_2$
- $f = \pi f_2$
- $P(\cdot) = (\frac{m}{\cdot})_4 = \chi_1(\cdot) \chi_2(\cdot), \text{ cond } \chi_1 = \pi, \text{ cond } \chi_2 = f_2$
- $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2 \pmod{\alpha}, \tau_1: \pi \text{ 等分点}, \tau_2: f_2 \text{ 等分点}$

$G_{R, \chi_2} = G_{R, \chi_2, \tau_2}, G_{R, \chi_1} = G_{R, \chi_1, \tau_1}$  を一般 Hurwitz 数とする。

補題 2 i)  $G_{R, \chi_2}, G_{R, \chi_1} \in K_{f_2}$  (conductor  $f_2$  の max. ray class field)

ii)  $G_{R, \chi_2} / \sqrt[4]{m_2}, G_{R, \chi_1} / \sqrt[4]{m_2^3} \in K(\sqrt{2})$

iii)  $m = p, p: \text{有理素数}, p \equiv 3 \pmod{4}, \pi = -p$  の時は

$$G_{R, \chi_2} / \sqrt{2}, G_{R, \chi_1} / \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

命題 1 に  $\text{Gal}(K^{ab}/K)$  を作用させると ii) が示される。iii) は直接計算により示される。

さて、概略に述べたように、 $K_f$  の楕円曲線  $\gamma$  の Kummer 対数微分が  $G_{R, X_2}$  及び  $G_{R, X_2+}$  で表わされる事を示そう。  $K$  に  $E$  の  $\alpha$  等分点の座標を付加してできる体を  $K(E_\alpha)$  と書く。  $K(E_f)$  を  $\mathbb{Q}_p(\overline{\mathbb{Q}_p}$  の完備化) に埋め込み、この埋め込みに関する  $K(E_f)$ ,  $K(E_{f+})$ ,  $K(E_\pi)$ ,  $K$  の完備化をそれぞれ  $K_2$ ,  $K_2$ ,  $K_p$ ,  $K_f$  で表わす。  $K_2/K_2$ ,  $K_p/K_f$  は完全分岐拡大、  $K_2/K_p$ ,  $K_2/K_f$  は不分岐拡大である。  $\Lambda$  を  $K_p$  の素元とすれば、  $K_p = K_f(\Lambda)$ ,  $K_2 = K_2(\Lambda)$  となる。 Coates-Wiles [2] により、  $\mathcal{O}_{K_f}$  上の 3 つの形式群

$G_a$ : formal additive group

$\hat{E}$ : formal group of kernel of reduction mod  $\mathfrak{p}$

$\Sigma$ : basic Lubin-Tate group

を考え、  $\rho: G_a \rightarrow \hat{E}$      $w: \hat{E} \rightarrow \Sigma$  を  $K_f$  上の同型写像とする。

$\lambda_1 = \frac{-2P(\tau_1)}{P'(\tau_1)}$ ,  $\Lambda_1 = w(\lambda_1)$  とおけば、  $\lambda_1, \Lambda_1$  は  $K_p$  の素元であり、  $\lambda_1 \equiv \Lambda_1 \pmod{\mathfrak{p}^2}$  が成り立つ。以後、拡大  $K_2/K_2$  に対する

Kummer 対数微分  $\varphi_k: K_2^\times \rightarrow \mathcal{O}_{K_2}/\mathfrak{o}_2 \mathcal{O}_{K_2} \quad (1 \leq k \leq g-1, \quad g = \pi \pi)$

を  $\varphi_k = \varphi_{k, \Lambda_1}$  で定義する。

注意 3    埋め込み  $K(E_p) \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$  によ、  $\tau \lambda_1 = \frac{-2P(\tau_1)}{P'(\tau_1)}$  は  $\mathbb{Q}_p$  の元とみなせ、これにより  $\Lambda_1$  は  $\pi + X^{g-1} = 0$  の根のうち  $\lambda_1 \equiv \Lambda_1 \pmod{\mathfrak{p}^2}$

となる  $\mathbb{C}_p$  の元として一意に定まるが、単に  $\mathbb{Q}$  の元としては  $\lambda_1$  に対応すべき  $\pi + \chi^{2-1} = 0$  の根は定まらない。これが ④ に関する不定性である。

以上の準備の下で次の定理が成り立つ。

定理 4

$$\varphi_k(\eta_c) = \begin{cases} -\frac{1}{4} G_{\frac{3}{2}}(\chi_2) & \text{mod } \mathcal{O} \quad \dots k = \frac{2-1}{4} \\ -\frac{1}{4} G_{\frac{3}{2}(2-1)}(\chi_2^{-1}) & \text{mod } \mathcal{O} \quad \dots k = \frac{3}{4}(2-1) \\ 0 & \text{mod } \mathcal{O} \quad \dots \text{その他の } k \end{cases}$$

(証明) Coates-Wiles [2] により、

$$\varphi_k(\phi(\tau, \mu\tau_2, \delta)) = \left( \begin{array}{l} z^{\frac{d}{4k}} \log(\phi(z + \mu\tau_2, \delta)) \text{ の } z=0 \text{ での Taylor} \\ \text{展開の } z^k \text{ の係数} \end{array} \right) \text{ mod } \mathcal{O}$$

$$2 = 3 \text{ として、 } N_{K/\mathbb{H}} \phi(\tau, \delta)^{16} = \prod_{\substack{\alpha \text{ mod } f \\ (\alpha, f)=1}} \phi(\alpha\tau, \delta)^{1+P(\alpha)+P^2(\alpha)+P^3(\alpha)} \quad \text{より、}$$

$$16 \varphi_k(N_{K/\mathbb{H}} \phi(\tau, \delta))$$

$$= \sum_{\mu \in (\mathcal{O}/f_2)^*} \sum_{\nu \in (\mathcal{O}/\pi)^*} (1 + \chi_1(\nu)\chi_2(\mu) + \chi_1^2(\nu)\chi_2^2(\mu) + \chi_1^3(\nu)\chi_2^3(\mu)) \varphi_k(\phi(\nu\tau, \mu\tau_2, \delta))$$

$$\varphi_k(\phi(\nu\tau, \mu\tau_2, \delta)) = \varphi_k(\phi(\tau, \mu\tau_2, \delta)^{\sigma_\nu}) = \nu^k \varphi_k(\phi(\tau, \mu\tau_2, \delta)) \quad \text{を用い}$$

て、 $\varphi_k(N_{K/\mathbb{H}} \phi(\tau, \delta))$  の計算を  $\phi(z + \mu\tau_2, \delta)$  の対数微分の Taylor

展開に帰着させれば

$$16 \varphi_k(N_{K/\mathbb{H}} \phi(\tau, \delta)) = \begin{cases} 12(P(\delta) - N\delta) G_k(\chi_2) & k = \frac{1}{4}(2-1) \\ 12(P(\delta) - N\delta) G_k(\chi_2^{-1}) & k = \frac{3}{4}(2-1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る。これより定理が従う。



次に  $\eta_3 = s + t\sqrt{m} + u\sqrt{m} + v\sqrt{m^3}$  とおく。  $\Delta_1^{8-1} = -\pi$  だが、  
 たから、  $\sqrt{m} = \Delta_1^{\frac{8-1}{4}} \xi$  と  $\xi$  を定義すれば  $\xi^4 = -m_2$  である。

これより、  $\eta_3 = s + t\xi \Delta_1^{\frac{8-1}{4}} + u\xi^2 \Delta_1^{\frac{8-1}{2}} + v\xi^3 \Delta_1^{\frac{3(8-1)}{4}}$ 。

$L \subset M \subset K_2$  によ、  $\eta_3 \in K_2$  の単数と考え、  $\varphi_k(\eta_3)$  を求めたい。  
 (勿論  $\pi$  の値は  $\Delta_1$  の取り方及び  $M$  の  $\mathfrak{P}$  上の素 ideal  $\mathfrak{Q}$  の取り方によ、  $\pi$  113。) Coates - Wiles [2] によ  $\varphi_k(\eta_3)$  は、

$f(T) = s + t\xi T^{\frac{8-1}{4}} + u\xi^2 T^{\frac{8-1}{2}} + v\xi^3 T^{\frac{3(8-1)}{4}}$  の対数微分の係数として与えられる。従、  $\pi$

定理 5 i)  $\varphi_{\frac{8-1}{4}}(\eta_3) = -\frac{1}{4} st\xi$

ii)  $\varphi_{\frac{3(8-1)}{4}}(\eta_3) = -\frac{1}{4} (3su - tv)\xi^3$

iii)  $\varphi_k(\eta_3) = 0 \quad \text{for } k \neq \frac{8-1}{4}, \frac{3(8-1)}{4}$

定理 4 との比較によリ

定理 6  $K(E_f)$  の  $(\pi)$  上の素 ideal  $\mathfrak{Q}$  を一つ固定して  $\Delta_1$  を決める。

この時

i)  $k = \frac{N\pi-1}{4} \Rightarrow hst \equiv G_{k, \chi_2} / \xi \pmod{\mathfrak{Q}}$

ii)  $k = \frac{3}{4}(N\pi-1) \Rightarrow h(3su - tv) \equiv G_{k, \chi_2} / \xi^3 \pmod{\mathfrak{Q}}$

ただし、  $\xi = \sqrt{m} / \Delta_1^{\frac{N\pi-1}{4}}$  は  $-m_2$  の 4 乗根のうちのひとつであり、  
 $\mathfrak{Q}$  に依存して決まる。

実際に  $\mathfrak{Q}$  を固定した時  $\xi$  が何になるかを決定するのは、 $K$  上で 4 乗剰余の Gauss 和の偏角を決定するのと同様の難しさがある。(もっとも、 $h$  の divisibility を知るだけなら  $\xi$  の選

び方とは無関係)  $m = p$ : 有理素数,  $p \equiv 3 \pmod{4}$  の時は  
 $\pi = -p$  となるので  $\pi$  は 1 の 4 乗根である。この場合の  $\Omega$  と  $\pi$   
 の関係を次節以降で調べる。

### §3 $\frac{1}{4}$ -set

$p$  を法 4 で 3 と同値な有理素数,  $\pi = -p$  とおく。  $E$  に対する  
 $P(\Omega)$ ,  $P'(\Omega)$  の  $\pi$ -等分点の値について  $\prod_{\alpha \in (\mathcal{O}_K/\pi)^*} P(\frac{\alpha}{\pi}\Omega) = \pi^2$ ,  
 $\prod_{\alpha \in (\mathcal{O}_K/\pi)^*} P'(\frac{\alpha}{\pi}\Omega) = (-64)^{\frac{p-1}{4}} \pi^{-3}$  が成り立つ。  $8 = N\pi = p^2$  とおく  
 と

$$\prod_{\alpha \in (\mathcal{O}_K/\pi)^*} \frac{-2P(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)}{P'(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)} = -p/16^{\frac{p-1}{2}} \in -\mathbb{R}_+$$

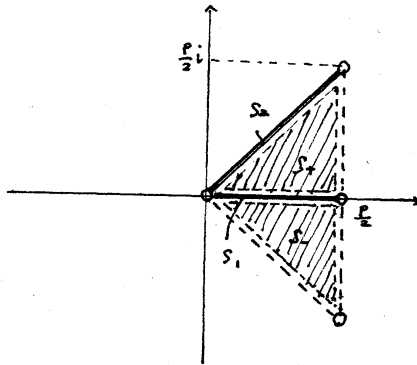
Matthews [5] にあて、  $\frac{1}{4}$ -set を導入しよう。  $(\mathcal{O}_K/\pi)^*$  にお  
 ける  $(\mathcal{O}_K/\pi)^*/\mu_4$  の完全代表系  $S$  を  $\frac{1}{4}$ -set と呼び出す。  $n$  のとき、  
 $(\mathcal{O}_K/\pi)^* = S \cup (iS) \cup (-S) \cup (-iS)$  となる。  $G(S) = \prod_{\alpha \in S} \frac{-2P(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)}{P'(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)}$  と  
 $G(S)$  を定義すると、  $\beta \in (\mathcal{O}_K/\pi)^*$  に対して  $G(\beta S) = (\frac{\beta}{\pi})_4 G(S)$  が  
 成立する。  $n = 2$ 、  $(\cdot)_4$  は 4 乗剰余記号である。従って、

$$G(S)^4 = G(S)G(iS)G(-S)G(-iS) = -p/16^{\frac{p-1}{2}}$$

$$\therefore G(S) = \pm \frac{\sqrt[4]{p}}{2^{\frac{p-1}{2}}} \zeta_8 \quad \text{または} \quad \pm i \frac{\sqrt[4]{p}}{2^{\frac{p-1}{2}}} \zeta_8$$

$\alpha(S) \in (\mathcal{O}_K/\pi)^*$  を、  $\alpha(S) = \prod_{\beta \in S} \beta$  と定義すれば、  $\alpha(S)$  は  $(\mathcal{O}_K/\pi)^*$   
 における 1 の原始 8 乗根であり、  $G(S)$  は  $\alpha(S)$  にしかよらない。  
 $n = 2$ 、  $G(S) = G_{\alpha(S)}$  と書く。  $\alpha \in \mu_4$  に対して  $G_{\alpha\beta} = \alpha G_\beta$  と

、 $\mathbb{Z}$  上の  $\alpha$  として、特殊な  $S$  について  $\alpha(S)$  と  $G(S)$  を決めれば  $G_p$  ( $\beta \in \mu_8 - \mu_4$ ) は決まる。 $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}'$ 、次のように  $S \subseteq \mathbb{Z}$  とする。



$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

$$S_1 = \{a \mid 1 \leq a \leq \frac{p-1}{2}\}$$

$$S_2 = \{(1+i)a \mid 1 \leq a \leq \frac{p-1}{2}\}$$

$$S_3 = \{a+bi \mid 2 \leq a \leq \frac{p-1}{2}, 0 < b < a\}$$

$$S_4 = \{a-bi \mid 2 \leq a \leq \frac{p-1}{2}, 0 < b < a\}$$

$\alpha = a$  のとき  $\beta \in S$  に関して  $\rho(\frac{p}{2}\alpha)$ ,  $\rho'(\frac{p}{2}\alpha)$  の偏角のみに注意すると、 $G(S) \in \mathbb{Z}_p^{\frac{p-1}{2}} \mathbb{R}_+$  がわかる。従って

$$G(S) = \mathbb{Z}_p^{\frac{p-1}{2}} \frac{4\sqrt{p}}{2^{\frac{p-1}{2}}}$$

他方  $\alpha(S)$  に関しては  $N: \mathbb{F}_p^* \rightarrow \mathbb{F}_p^* \cong \mathbb{Z}$

○  $p \equiv 3 \pmod{8}$  の時

$(\frac{2}{p}) = -1$  より  $N(a+ai) = 2a^2$  は平方非剰余、従って

$N: S_1 \cup S_2 \rightarrow \mathbb{F}_p^*$  は全単射であり、 $N: S_+ \rightarrow \mathbb{F}_p^*$  は  $\frac{p-3}{8} : 1$

の全射となる。 $\alpha = a$  のとき

$$\begin{aligned} \alpha(S) &= \prod_{\alpha \in S} \alpha = \left( \prod_{\alpha \in S_1} \alpha \right) \left( \prod_{\alpha \in S_2} \alpha \right) \left( \prod_{\alpha \in S_+} N\alpha \right) \\ &= (-1)^{\frac{p-3}{8}} (1+i)^{\frac{p-1}{2}} \end{aligned}$$

○  $p \equiv 7 \pmod{8}$  の時

$(\frac{2}{p}) = 1$  より  $N(a+ai) = 2a^2$  は平方剰余、従って  $N: S_+ \rightarrow \mathbb{F}_p^*$

は平方剰余の上  $\wedge (\frac{p+1}{8} - 1) : 1$  非剰余の上  $\wedge \frac{p+1}{8} : 1$  となる。

とあり。

$$\begin{aligned}
\alpha(S) &= \left( \prod_{\alpha \in S_1} \alpha \right) \left( \prod_{\alpha \in S_2} \alpha \right) \left( \prod_{\alpha \in S_+} N\alpha \right) \\
&= \left( \prod_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} a \right) \left( \prod_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} (1+i)a \right) \left( \prod_{\beta \in \mathbb{F}_p^{\times 2}} \beta \right)^{\frac{p-1}{2}} \left( \prod_{\beta \in \mathbb{F}_p^{\times} - \mathbb{F}_p^{\times 2}} \beta \right)^{\frac{p+1}{2}} \\
&= (-1)^{\frac{p+1}{2}} (1+i)^{\frac{p-1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\text{両者を合わせて } \alpha(S) = (-1)^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} (1+i)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{\pi}$$

を得る。

#### §4 $\pi$ の決定

$\pi$ ,  $P$  を前節通りとすると  $f = \text{cond } P = 4P$  となり,  $4\tau_1 = \frac{-1}{\pi} \Omega \pmod{\mathcal{O}}$  となる。  $\lambda_1 = \frac{-2P(\tau_1)}{P'(\tau_1)}$ ,  $\Delta_1 = w(\lambda_1)$  であり,  $\lambda_1, \Delta_1$  は  $K_F$  の素元で  $\lambda_1^{2-1} + \pi \equiv 0$ ,  $\lambda_1 \equiv \Delta_1 \pmod{\mathfrak{p}^2}$  が成立している。さて,  $\Lambda$  を  $K_F$  上の既約方程式  $T^{2-1} + \pi = 0$  の根としよう。ただし,  $\Lambda$  が  $K_F$  の肉体の中で何になるかは問題としない。この時,  $T^{2-1} + \pi = 0$  は  $K_F(\Lambda)$  で完全分解され, 根の全体は  $\{\Lambda, \zeta\Lambda, \dots, \zeta^{2-1}\Lambda\}$  となる。  $\zeta$  は 1 の原始  $2-1$  乗根である。埋め込み  $K_F(\lambda_1) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$  を固定して  $\lambda_1 \in \mathbb{C}_p$  と見なす。すると, 1 になる埋め込み  $K_F(\Lambda) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$  に対しても  $K_F(\lambda_1) = K_F(\Lambda)$  となるが,  $\Delta_1$  が  $\{\Lambda, \dots, \zeta^{2-1}\Lambda\}$  のどの元になるかは埋め込みによる。この事を代数体の level で考えよう。以下, 全ての代数体は  $\mathbb{C}$  の部分体と考える。

$$(\mathbb{C}_p/\pi\mathbb{C}_p)^{\times} \cong \text{Gal}(K(\lambda_1)/K) \cong \text{Gal}(K_F(\lambda_1)/K_F)$$

により,  $(\mathbb{Q}/\pi\mathbb{Q})^* \ni v$  に対応する  $\text{Gal}(\mathbb{K}_8(\lambda_1)/\mathbb{K}_8)$  の元を  $\sigma_v$  と書く。  $\mathbb{K}_8(\lambda_1) = \mathbb{K}_8(\Lambda)$  より  $\sigma_v \in \Lambda$  にも作用させれば,

$$\lambda_1^{\sigma_v} = \left( \frac{-2P(\tau_1)}{P'(\tau_1)} \right)^{\sigma_v} = \frac{-2P(v\tau_1)}{P'(v\tau_1)}$$

$$\Lambda^{\sigma_v} = \tau_v \Lambda, \quad \tau_v \in \mathcal{M}_{g-1}, \quad v \equiv \tau_v \pmod{p}$$

となる。従って, 前節の  $\frac{1}{4}$ -set  $S$  に対し,

$$\prod_{v \in S} \lambda_1^{\sigma_v} = \prod_{v \in S} \Lambda^{\sigma_v} \pmod{p^{\frac{p-1}{4}+1}}$$

$$\text{i.e.} \quad G(-\frac{1}{4}S) \equiv \alpha(S) \Lambda^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p^{\frac{p-1}{4}+1}}$$

これより  $G(S)/\alpha(S) \equiv \Lambda^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p^{\frac{p-1}{4}+1}}$  が得られる。前節の結果と合わせて

$$\begin{aligned} \tau &= 4\sqrt{p}/\Lambda^{\frac{p-1}{4}} \equiv (-1)^{\left[\frac{p+1}{8}\right]} (1+i)^{\frac{p-1}{2}} 2^{\frac{p-1}{2}} / \tau_8^{\frac{p-1}{2}} \\ &\equiv \begin{cases} -\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{p-3}{4}} \pmod{p} & \text{if } p \equiv 3, 7 \pmod{16} \\ \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{p-3}{4}} \pmod{p} & \text{if } p \equiv 11, 15 \pmod{16} \end{cases} \end{aligned}$$

最終的には

定理 7  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ,  $h = h_{L_1}/h_{K_1}$ ,  $\eta_3 = s + t\sqrt{p} + u\sqrt{p} + v\sqrt{p^3}$ ,  $k_0 = \frac{p-1}{4} \times 3$  と、 $p \in \mathbb{Z}$  とし

$$\text{i)} \quad hst \equiv 2^{\frac{p+1}{4}} G_{k_0, x_2}/\sqrt{2} \times \begin{cases} 1 & p \equiv 3, 15 \pmod{16} \\ -1 & p \equiv 7, 11 \pmod{16} \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad h(3sv - tu) \equiv 2^{\frac{p+1}{4}} G_{3k_0, x_2}/\sqrt{2} \times \begin{cases} 1 & p \equiv 11, 15 \pmod{16} \\ -1 & p \equiv 3, 7 \pmod{16} \end{cases}$$

(i) ii) 共 右辺は有理数なので合同式は意味を持つ。)

例 8  $p = 7$  とすると,

$$\eta_3 = 43 + 26\sqrt{7} + 16\sqrt{11} + 104\sqrt{77}$$

$$h_{K_1} = 1, \quad h_{L_1} = 2, \quad h = 2$$

$$\therefore hst \equiv 3, \quad h(3sv - tu) \equiv 5 \pmod{7}$$

$$G_{12, \kappa_2} = \sqrt{2} \times 11232/25 \equiv \sqrt{2} \pmod{7}$$

$$G_{36, \kappa_2} = \sqrt{2} \times 1447788874210204192/127679296875 \equiv 4\sqrt{2} \pmod{7}$$

$$\therefore -2^{\frac{p+1}{2}} G_{12, \kappa_2}/\sqrt{2} \equiv 3, \quad -2^{\frac{p+1}{2}} G_{36, \kappa_2}/\sqrt{2} \equiv 5 \pmod{7}$$

### §5 純6次体の場合

$L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{m})$ ,  $m = ab^2c^3d^4e^5$ ,  $a \neq 1$ ,  $b, c, d, e$ , は正整数、square free  $\mathbb{Z}$ ,  $a, \dots, e, 6$  は  $\mathbb{Z}$  の2つも互いに素とする。 $L_1$  の部分体を  $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ,  $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$  とおき、 $K_1, F_1$  の基本単数を  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  とおく。 $L_1$  の単数群を  $\mathcal{O}_{L_1}$  と書く。 $\eta_0 \in N_{L_1/K_1}$ ,  $\eta_0 = 1$ ,  $N_{L_1/F_1}$ ,  $\eta_0 = 1$  となる1より大きい最小の  $L_1$  の単数とし、 $\mathcal{O}_0 = \mathbb{Z}[1] \times \varepsilon_2^{\mathbb{Z}} \times \varepsilon_3^{\mathbb{Z}} \times \eta_0^{\mathbb{Z}}$  とおく。 $\mathcal{O}$  を割る  $\mathbb{Q}(\zeta_3)$  の素数  $\pi$  をとり、 $E: y^2 = 4x^3 - 1$  に対する量指標  $\psi$  に関し、 $\psi(\pi) = \pi$  を仮定する。 $\rho = (\frac{m}{\cdot})_6$  の  $\pi$  と素な part  $\chi_2$  と適当な  $(\text{cond } \chi_2)$ -等分点  $\tau_2$  に対して  $G_{K, \kappa_2^{\pm 1}} = G_{K, \kappa_2^{\pm 1}, \tau_2}$  を一般 Hurwitz 数とすると、 $-\frac{m}{\pi}$  の適当な6乗根  $\xi$  に対し、

定理 9

- $\frac{h_{L_1}}{h_{K_1} h_{F_1}} \frac{6}{|\mathcal{O}_{L_1} : \mathcal{O}_0|} \tau \equiv G_{K_0, \kappa_2}/\xi \pmod{8}$
- $\frac{h_{L_1}}{h_{K_1} h_{F_1}} \frac{6}{|\mathcal{O}_{L_1} : \mathcal{O}_0|} (5\chi - t\omega) \equiv G_{5K_0, \kappa_2^{-1}}/\xi^5 \pmod{8}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}''$   $k_0 = \frac{N\pi-1}{6}$   $\mathbb{Z}''$  あり、 $\mathfrak{g}$  は  $(\pi)$  上のある素 ideal である。

特に  $P \equiv -1 \pmod{9}$  かつ  $P \equiv 1 \pmod{4}$  の時は  $\chi_2 = \text{trivial}$ ,

$\mathfrak{f} = 1$  となり、合同式が不定性なく記述される。

### 文献

- [1] N. Ankeny, E. Artin and S. Chowla: The class number of real quadratic fields. Ann. of Math (2) 56 (1952) 479-493
- [2] J. Coates and A. Wiles: On the conjecture of Birch and Swinnerton-Pyer. Invent Math 39 223-251 (1977)
- [3] H. Ito: Congruence relations of Ankeny-Artin-Chowla type for pure cubic fields. preprint
- [4] S. Lichtenbaum: On p-adic L-functions associated to elliptic curves. Invent. Math 56 (1980) 19-55
- [5] C.R. Matthews: Gauss sums and elliptic functions, II. The Quartic sum. Invent Math 54 (1979) 23-52
- [6] K. Nakamura: Class number calculation and elliptic units I, II, III. Proc. Japan Acad 57A(1981) 56-59, 117-120, 363-366.
- [7] G. Robert: Unités elliptiques. Bull. soc. Math. France. Memoire 36 (1974)
- [8] M. Kamei: Congruence Relations of Ankeny-Artin-Chowla Type for pure Quartic and Sextic Fields 修論. 1984